

DEUX OU TROIS JOLIES IDÉES SUR LES NOMBRES PREMIERS

Trois niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : parties 1 et 2.

— Piste rouge : parties 1 à 3.

— Piste noire : tout le devoir.

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On convient dans ce devoir que les notations $\sum_{p \leq n}$ et $\prod_{p \leq n}$ désignent des sommes et des produits étendus à l'ensemble $\mathbb{P} \cap \llbracket 1, n \rrbracket$ des nombres premiers inférieurs à n . Par exemple :

$$\sum_{p \leq 10} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad \sum_{p \leq 12} p = 2 + 3 + 5 + 7 + 11.$$

On pose ensuite $x^y = e^{y \ln x}$ pour tous $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. Cette définition généralise la notation classique x^n , qui n'a de sens au lycée que si n est un entier. Attention, la nouvelle notation x^y autorise des exposants y quelconques, mais la présence du logarithme exige que x soit strictement positif. Faites l'effort de vérifier rapidement pour vous-mêmes les affirmations suivantes :

— La relation $x^y = e^{y \ln x}$ est bien une généralisation de la relation $x^n = e^{n \ln x}$. En d'autres termes, pour tous $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$: $e^{n \ln x} = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n \text{ termes}}$ et pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$: $e^{n \ln x} = \underbrace{\frac{1}{x} \times \dots \times \frac{1}{x}}_{-n \text{ termes}}$.

— Pour tous $x, x' > 0$ et $y, y' \in \mathbb{R}$:

$$\ln(x^y) = y \ln x, \quad x^{y+y'} = x^y x^{y'}, \quad x^{yy'} = (x^y)^{y'}, \quad (xx')^y = x^y x'^y \quad \text{et} \quad x^{-y} = \frac{1}{x^y} = \left(\frac{1}{x}\right)^y.$$

Pour finir, n'oubliez pas qu'une somme infinie est par définition la limite d'une suite convergente. Il est donc interdit de manipuler les sommes infinies comme s'il s'agissait de sommes banales. En cas de besoin, revenez à des sommes finies et passez soigneusement à la limite.

1 MINORATION DE LA SOMME DES INVERSES DES NOMBRES PREMIERS

Soit $n \geq 2$.

1) a) Montrer que pour tout $t \in [0, 1[$: $\ln(1-t) + t + \frac{t^2}{2(1-t)} \geq 0$.

b) Montrer que : $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \geq \ln \prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} - \frac{1}{2} \sum_{p \leq n} \frac{1}{p(p-1)}$.

2) Montrer que pour tous $p \in \mathbb{P}$ et $r \in \mathbb{N}$: $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geq \sum_{k=0}^r \frac{1}{p^k}$, puis que : $\prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

L'idée magnifique de cette question est l'œuvre du mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783), qui est le premier à y avoir pensé.

3) a) Sans calculer l'intégrale, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$, puis que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln n$.

b) En déduire que : $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \geq \ln \ln n - \frac{1}{2}$.

2 MINORATION DU $n^{\text{ÈME}}$ NOMBRE PREMIER

On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite ordonnée des nombres premiers : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5 \dots$

4) a) Montrer que le produit $\prod_{\substack{p \leq 2n+1 \\ p > n+1}} p$ divise $n! \binom{2n+1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que : $\prod_{\substack{p \leq 2n+1 \\ p > n+1}} p \leq 4^n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$.

On doit cette jolie preuve au mathématicien hongrois Paul Erdős (1913-1996), qui l'a publiée en 1932.

5) a) En adaptant la technique de la question 3)a), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(n!) \geq n \ln n - n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n \geq \frac{n \ln n - n}{2 \ln 2}$.

Pour une preuve aussi courte, l'inégalité obtenue est très bonne. On peut montrer que $\frac{p_n}{n \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, mais c'est hautement non trivial. On note généralement $p_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n \ln n$ le résultat et on dit que p_n est équivalent à $n \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3 UN LIEN ENTRE LA FONCTION ζ ET LES NOMBRES PREMIERS

Pour tous $s > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}$ et $\pi_n(s) = \prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$.

6) Montrer que la suite $(\zeta_n(s))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge pour tout $s > 1$ et que sa limite $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$ est inférieure à $1 + \frac{1}{s-1}$.

La fonction ζ est l'une des fonctions les plus célèbres des mathématiques et se trouve en dépit des apparences liée à la répartition des nombres premiers. Pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{N}$, on pose $E_{r,t} = \{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \llbracket 0, t \rrbracket\}$.

7) Soient $s > 1$ et $n \geq 2$.

a) Montrer qu'il existe deux entiers $r \in \mathbb{N}^*$ et $T \in \mathbb{N}$ pour lesquels $\llbracket 1, n \rrbracket \subset E_{r,T}$. On choisit r minimal en vue des questions qui suivent.

b) En déduire que pour tout $t \geq T$: $\zeta_n(s) \leq \prod_{i=1}^r \sum_{j=0}^t \frac{1}{p_i^{sj}} \leq \zeta(s)$.

c) En déduire que : $\zeta_n(s) \leq \pi_n(s) \leq \zeta(s)$, puis que la suite $(\pi_n(s))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

En d'autres termes, pour tout $s > 1$: $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ (développement eulérien de la fonction ζ).

4 ÉQUIVALENT DE LA SOMME DES INVERSES DES NOMBRES PREMIERS

8) Montrer que $\ln(1+t) \leq t$ pour tout $t > -1$, puis que pour tous $n \geq 2$ et $s > 1$: $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p^s} \leq \ln \zeta(s)$.

9) a) Soit $(a_n)_{n \geq 2}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que pour tout $n \geq 2$: $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \leq e^{a_n} \ln \left(\frac{\ln n}{a_n} + 1 \right)$.

b) En déduire que $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln \ln n$.

Le rapport $\frac{1}{\ln \ln n} \sum_{p \leq n} \frac{1}{p}$ tend ainsi vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, mais cette limite ne fournit aucune estimation de la différence $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} - \ln \ln n$. A-t-elle une limite ? Converge-t-elle ? Diverge-t-elle vers $\pm\infty$? Un certain *théorème de Mertens*, abordable en MPSI mais bien plus difficile, affirme que la suite $\left(\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} - \ln \ln n \right)_{n \geq 2}$ converge.